微分積分と物理とを接続するための教材開発

青木　禎彦
Yoshihiko Aoki

【概　要】

多くの高校生には，数学と物理を全く別な学問として捉える傾向がある。その理由の一つに，物理基礎及び物理を履修する時期と数学 II 或いは数学 III において微分・積分を履修する時期とにずれがあり，物理の学習に当たって微分積分の学習内容を前提にできないことが挙げられる。加えて，数学において微分方程式を扱わないために，運動方程式を解こうとすると，公式に当てはめて処理せざるを得ない状況にあるということがある。

この状況は，高等学校における数学科及び理科の学習内容をいたずらに難しくしないという観点からやむを得ないものと考えられるが，将来，理学系の研究者や工学系の技術者を目指そうとする生徒にとっては必ずしも好ましいものではない。

そこで，高等学校における発展的学習のための教材又は高大接続におけるブリッジ教材として，できる限り高等学校で学ぶ数学を基に，線形２階斉次微分方程式を解けるようになることを目標とした教材の開発を試みることとした。

1　はじめに

昭和 35 年（1960 年）及び昭和 45 年（1970 年）改訂の高等学校学習指導要領では,「数学 III」及び「応用数学」の学習内容に微分方程式が含まれており，いずれの科目でも $\dfrac{dy}{dx} = kx$ 程度の微分方程式を扱うことになっていた。このうち,「応用数学」は「職業に関する専門教育で必要とする数学的な概念およびこの概念とそれが応用される事象との関連を理解させ，数学的に処理する能力を養う。」ことを目標にした科目であり，そのような科目においても，選択的内容であったが微分方程式に関する単元があり,「数学 III」とほぼ同様の扱いがされていた。続く，昭和 58 年（1978 年）改訂の学習指導要領でも,「微分・積分」において，それまで学習指導要領と同様に微分方程式を扱っていた。いずれの学習指導要領においても「$\dfrac{dy}{dx} = ky$ 程度」という記述から分かるとおり，変数分離形の微分方程式が中心であった。

平成元年（1989 年）改訂の高等学校学習指導要領から，微分方程式が除かれることになったが，それまでの状況を見ると変数分離形や，さらには誘導することにより同次形の微分方程式を扱うことは，大学の理工学系学部を目指す高校生にとって無理のあるものではなかったと考えられる。

現行の学習指導要領においては,「数学 B」の数列において簡単な漸化式を扱うことになっている。その中で，隣接３項間漸化式は発展的な内容になっているものの，現実的に，普通科高校においては基本的に扱われている内容である。そこで，数列の隣接３項間漸化式の解法を基にして，線形２階斉次微分方程式を指導することを考える。

2　数列の漸化式と関連付ける理由

数列の隣接３項間漸化式

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 \qquad (1)$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の集合は線形空間をなし，同様に線形２階斉次微分方程式

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

の解空間もまた線形空間をなす。式 (1) と式 (2) の解空間をそれぞれ V_1，V_2 とすると，V_1 と V_2 は，線形空間として同じ構造をしている。

今，V_1 において数列 $\{a_n\}$ を $\{a_{n+1}\}$ にずらす写像を f_1，V_2 において y を y' に対応させる，すなわち，微分するという写像を f_2 とおく。すると，(1) は

$$a_{n+2} = -pa_{n+1} - qa_n \tag{1'}$$

であるので

$$f_1 : \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

と表すことができる。一方，f_2 に関しても

$$f_2 : \begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

であり，２つの写像 f_1 と f_2 は同一の行列で表される線形変換である。すなわち，漸化式 (1) を満たす数列 $\{a_n\}$ も，微分方程式 (2) を満たす関数 y も同様に求めることができるということである。

このことから，数列の隣接３項間漸化式の解法を用いて線形２階斉次微分方程式を解くことは，高校生にとって馴染みのあるものであるばかりか，大学進学後に線形代数を学ぶ上でも有意義であると考えられる。

３　物理における様々な運動

学習指導要領における「物理」の内容は，**様々な運動** から始まり，そこには「放物運動」が示されている。この点について，学習指導要領解説には次のように指示されている。

「ここでは，水平投射及び斜方投射における速度，加速，重力の働きなどを扱う。空気の抵抗については，例えば速さに比例する抵抗力を受けるとした場合の運動に触れる。」

水平投射及び斜方投射に関しては，微分方程式に関する概念がなくとも，質点の位置 $\boldsymbol{P}(x,\ y)$ に対して，その速度及び加速度ベクトルがそれぞれ

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\ \boldsymbol{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) \tag{5}$$

であるという理解ができていれば微分と積分を用いて解くことができる。それに対して，空気の抵抗を受ける運動については，雨滴の終端速度などがよく取り上げられ，学習者に微分方程式を解くという概念があれば，その理解はより深まるものと考えられる。

さらに，単振動については，実験等によりその規則性を見出すことに重点が置かれており，その趣旨は十分理解できるものの，運動方程式（微分方程式）を解くことによる裏付けがあれば，ここでもその理解はより深まることが期待できる。

以上のような観点から，線形２階斉次微分方程式の解法に関する知識をもつこと，しかも複素数の指数を含めた理解ができていることは物理を学ぶ姿勢に良い影響を与えるものと考えられる。その後に学ぶ，エネルギーや惑星の運動に関しては，１変数の微分・積分だけでは対応が難しく，偏微分・重積分或いはベクトル解析の知識も必要となるので，大学で学ぶ数学に任せなければならないものの，物体の運動が数式により規定されており，そ

の数式を適切に処理することで運動の仕組みを解き明かすことができる，という理解につながるであろう。また，大学進学後に，機械工学や電気・電子工学等を学ぶ学生にとっては，そこで学ぶ内容の基礎に数学があり，数学を学ぶ動機につながるのではないかと期待できる。

4　オイラーの公式について

前述のとおり，かつての学習指導要領においては変数分離形の微分方程式が扱われており，数列の隣接３項間漸化式と関連付けることにより，線形２階斉次微分方程式を変数分離形の微分方程式と同様に解くことができる。ところが，単振動を扱おうとすると オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{6}$$

を押さえる必要がある。オイラーの公式は，通常，関数 $y = e^x$，$y = \sin x$ 及び $y = \cos x$ のマクローリン展開の比較から導くことが多い。これは，高校生にとってかなり高いハードルとなる。

一方で，数学Ｂの指数・対数関数の単元において，指数法則が成り立つという観点で，指数を自然数から整数，有理数，実数への拡張することを学んでおり，さらに，数学 III の複素数平面の単元においては，ド・モアブルの定理を含めて複素数の扱いを体系的に学んでいる。そのことから，実数まで拡張した指数を複素数の範囲にまで拡張することにより，オイラーの公式を直観的に理解することは比較的に受け入れやすいのでないかと考える。正規のカリキュラム内の学習ではなく発展的な学習内容であるということを考えれば，直観的に受け入れられるという程度で十分であろう。

5　発展学習としての指導の実際

(1)　速度・加速度と導関数の関係

速度と微分係数又は導関数との関連については，高等学校数学の教科書においてもかなりの差がある。例えば，最も多く採択されている「数研出版 新編 数学 II」は，平均の速さと瞬間の速さについて補充的内容として次のように説明している。

> 物体が静止した状態から重力の影響を受けて落下する運動を考えてみましょう。この運動では，落下する距離を ym とすると，y は経過時間 t 秒後の関数で，およそ次の式で表されることが知られています。
>
> $$y = 4.9t^2$$
>
> このとき，$t = 5$ から $t = 5 + h$ までの，物体の平均の速さは
>
> $$\frac{4.9(5+h)^2 - 4.9 \times 5^2}{h} \text{ (m/s)}$$
>
> で表されます。
> ここで，h を 0 に限りなく近づけるときの平均の速さの極限値は，落下し始めてから５秒後における物体の瞬間の速さといえます。
> その瞬間の速さは，何 m/s でしょうか。

明らかに関数 $y = 4.9t^2$ の $t = 5$ における微分係数を求めているのであるが，微分係数という言葉は用いられていない。数学で学ぶ微分・積分を物理に活用しようと考えれば，速度・加速度と微分係数又は導関数との関係を明確に説明しおく必要がある。例えば，

x 軸上を動く質点Pの時刻 t における位置が $x = f(t)$ であるとき，時刻 t から $t+h$ における平均の速さは

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \tag{7}$$

である。ここで h を限りなく0に近づける（$h \to 0$ の極限をとる）と，その値は質点Pの時刻 t における瞬間の速さを表すと考えられる。質点Pの時刻 t における瞬間の速さを $v(t)$ とおけば

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \tag{8}$$

であり，このことは取りも直さず $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ であることを表している。

というようなものにより，質点Pの位置を表す関数の導関数が速さを表し，さらに質点Pの速さを表す関数の導関数が加速度であることを示さなければならない。なお，本来は，「速さ」ではなく「速度」を用いなければならないが，ベクトルの概念を同時に入れることによる混乱を避けるために，ここでは敢えて「速さ」を用いた。

(2) 垂直投射

例題1

質量 m の物体を，地上から鉛直上方に初速 v_0 で打ち上げた。この物体が到達する最高点の高さ H と，再び地上に戻るまでの時間 T とを求めよ。ただし，物体は回転することなく，空気抵抗などの物体にかかる力は重力を除いて無視できるものとする。また，重力加速度定数は g とする。

鉛直方向上向きに x 軸をとり，地上の x 座標を0とすると，物体にかかる力は重力のみであって

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \tag{9}$$

が成り立つ。したがって

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \tag{10}$$

である。そこで，式(10)の両辺を t で積分すると

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C \tag{11}$$

を得る。式(11)に $t=0$ を代入すれば

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = C \tag{12}$$

となって，積分定数 C の表すものが初速 v_0 であることが分かり

$$\frac{dx}{dt} = -gt + v_0 \tag{13}$$

となる。さらに，式(13)の両辺を積分した上で，$t=0$ で題意の物体が地上にあることを考慮すれば

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \tag{14}$$

であり，式(13)と式(14)でこの物体の運動を捉えることができるようになる。

最高点に到達する時刻を t_1 とすれば，$t = t_1$ での物体の速度は0となるので，最高点の高さ H は，式(14)に $t = t_1$ を代入して求めることができる。さらに $T = 2t_1$ であることは明らかであり

$$t_1 = \frac{v_0}{g}, \quad H = \frac{{v_0}^2}{2g}, \quad T = \frac{2v_0}{g} \tag{15}$$

が得られる。又は，式(14)を平方完成する方

法も考えられる。

$$x = -\frac{g}{2}\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{{v_0}^2}{2g} \tag{16}$$

なお，このとき，式 (10) や式 (13) のように，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dfrac{dx}{dt}$ などの導関数を含む方程式を微分方程式ということを説明しておく必要がある。

(3)　雨滴の運動（終端速度）

「1　はじめに」に記載したとおり，かつて高等学校の数学で微分方程式が扱われていたとき，学習指導要領では $\dfrac{dy}{dx} = ky$ 程度の方程式を扱うとされていた。実際，空気抵抗を受ける運動の方程式や線形 2 階の斉次微分方程式を解くためには，$\dfrac{dy}{dx} = ky$ が解ければ十分なのである。

$$\frac{dy}{dx} = ky \tag{17}$$

は次のようにして解くことができる。

関数 y が恒等的に 0 でなければ，式 (17) の両辺を y で割って

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = k \tag{18}$$

となる。この式の両辺を x で積分して

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}\, dx = k \int dx$$
$$\int \frac{1}{y}\, dy = k \int dx$$
$$\log |\, y \,| = kx + C$$
$$|\, y \,| = e^{kx+C}$$
$$y = \pm e^C\, e^{kx}$$

ここで改めて，$\pm e^C$ を C と書けば

$$y = Ce^{kx} \tag{19}$$

を得る。$\pm e^C$ を C としているので，$C \neq 0$ であるが，関数 y が恒等的に 0 である場合にも微分方程式 (17) を満たしているので，$C = 0$ の場合も含めて，式 (19) が微分方程式 (17) の解であると分かる。この解法を用いて，雨滴の運動を求める。

例題 2

雨滴は，上空から落下する際に重力と空気の抵抗とを受ける。空気の抵抗は速度に比例し，その比例定数を k と表すことにする。重力により加速した雨滴は，速度に比例した空気の抵抗も同時に受けるので，空気抵抗が増して重力と釣り合うと等速運動をすることになる。そして，等速運動となったときの速度を終端速度という。

雨滴の質量を m として，雨滴の終端速度を求めよ。

鉛直方向下向きに x 軸をとり，雨滴の落下速度を v とする。雨滴は，重力 mg と空気抵抗 $-kv$ とを受けるので，運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \tag{20}$$

を満たしている。この方程式を式 (17) の形にするために，次の変数変換を行う。

$$v = u + \frac{mg}{k} \tag{21}$$

すると，$\dfrac{dv}{du} = 1$，$mg - kv = -ku$ となるの

で，微分方程式 (20) は

$$\frac{du}{dt} = -\frac{k}{m}u \tag{22}$$

に帰着することができる。式 (19) に従えば $u = Ce^{-\frac{k}{m}t}$ となり，変数 u を v に戻して

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \tag{23}$$

を得るが，$t = 0$ で $v = 0$ と考えれば $C = -\dfrac{mg}{k}$ であるので

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \tag{24}$$

ここで，$t \to \infty$ とすると，終端速度が $\dfrac{mg}{k}$ であることを示すことができる。

(4)　変数分離形微分方程式

ここで，次のことを説明すべきであろう。

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \tag{25}$$

の式で与えられる微分方程式を変数分離形微分方程式と呼び，微分方程式 (25) は

$$\frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = f(x) \tag{26}$$

と変形したした上で，両辺を x で積分することにより

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \tag{27}$$

として解を求めることができる。

変数分離形は，微分方程式として最も基本的な形であり，これ以降の微分方程式を解くための基本となるからである。

ただし，最終的な目標は線形２階斉次微分方程式を解くことにあるので，複雑な方程式を解くという演習は不要であると考える。かつての学習指導要領に示されていたように，微分方程式 (17) が解ければ十分である。

(5)　線形２階斉次微分方程式

前述したように，線形２階斉次部分方程式は，数列の隣接３項間漸化式の解法を参考にして解く。そこで，まず次の例題を考える。

例題３

漸化式 $\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \\ a_1 = 0, \quad a_2 = 1 \end{cases}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

前述のとおり，この漸化式は，教科書で発展的な内容として取り扱われているものの，大学進学希望者の多い普通科高等学校において必ず扱われるものである。その際，ほとんどの教員が特性方程式と特性解を用いて指導している。

特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ を解いて，特性解 $\lambda = 2$ と $\lambda = 3$ を得るので

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

は次の２通りに変形することができる。

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3\left(a_{n+1} - 2a_n\right) \tag{28}$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2\left(a_{n+1} - 3a_n\right) \tag{29}$$

この２つの変形は，２次方程式の解と係数の関係からも明らかである。式 (28) からは

$$a_{n+1} - 2a_n = 3^{n-1}(a_2 - 2a_1) = 3^{n-1} \tag{30}$$

式 (29) からは

$$a_{n+1} - 3a_n = 2^{n-1}(a_2 - 3a_1) = 2^{n-1} \tag{31}$$

したがって，(31) − (30) より

$$a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1} \tag{32}$$

を得る。

次に，この漸化式解法を基に線形２階斉次微分方程式の解法を考える。

例題４

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \tag{33}$$

例題３の漸化式とまったく同じ形をしているので，次の２つの変形ができる。

$$y'' - 2y' = 3(y' - 2y) \tag{34}$$

$$y'' - 3y' = 2(y' - 3y) \tag{35}$$

式 (34) からは，$y' - 2y$ が恒等的に 0 ではないとき

$$\frac{y'' - 2y'}{y' - 2y} = 3 \tag{36}$$

であるので，両辺を x で積分することにより，

$$\int \frac{y'' - 2y'}{y' - 2y}\,dx = 3\int dx$$

$$\therefore \quad \log|\,y' - 2y\,| = 3x + C$$

となるので，変数分離形の場合と同様に

$$y' - 2y = C_1 e^{3x} \tag{37}$$

であり，$y' - 2y$ が恒等的に 0 になる場合もこの式に含まれる。同様にして式 (35) からは

$$y' - 3y = C_2 e^{2x} \tag{38}$$

が得られるので，(37) – (38) によって，微分方程式 (33) の解を

$$y = C_1 e^{3x} - C_2 e^{2x} \tag{39}$$

と求めることができる。

先に述べたように，例題３と例題４の数列の漸化式と微分方程式という一見大きく異なる題材が，線形空間という共通性から同様に解けてしまうことは，大学入学後に線形代数を学ぶ上でも大変興味深い。

(6)　指数の複素数への拡張

オイラーの公式については

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{40}$$

の成立を，高校生に発見させることはかなり難しいと考える。したがって，このように定義することで，指数法則に矛盾なく指数を複素数にまで拡張できることを確認し，理解する程度に留めることが無難であろう。具体的には，式 (40) と定義したとき

$$e^{i\alpha + i\beta} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} \tag{41}$$

の成り立つことを示せば，式 (40) の定義の妥当性を確認することができる。

$$\begin{aligned}
&e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}\\
&= (\cos\alpha + i\sin\beta)\,(\cos\beta + i\sin\beta)\\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\\
&\qquad\qquad + i\,(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\\
&= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\\
&= e^{i(\alpha+\beta)}\\
&= e^{i\alpha + i\beta}
\end{aligned}$$

(7)　単振動

それでは，これまでの議論を踏まえて，最終的な目標である単振動について考えていく。単振動は，次の運動方程式で規定される運動である。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (k > 0) \tag{42}$$

例題 5

運動方程式 (42) で表される単振動について，x を時刻 t の関数として表わせ。

特性方程式が $m\lambda^2+k=0$ であり，特性解が $\lambda=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$ であるから，その解は

$$x=C_1e^{\sqrt{\frac{k}{m}}\,it}+C_2e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,it} \tag{43}$$

である。オイラーの公式を用いると

$$\begin{aligned}x&=C_1\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\\&\qquad+C_2\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t-i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\\&=(C_1+C_2)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\\&\qquad+i\,(C_1-C_2)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\end{aligned}$$

ここで，注意しなければならないのは C_1 と C_2 が複素数であり，x は実数値関数であるという点である。したがって，C_1 と C_2 は共役複素数であり，C_1+C_2 と $i\,(C_1-C_2)$ を改めて C_1 と C_2 と書けば，運動方程式 (42) の解は次のとおりである。

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\varphi\right) \tag{44}$$

だだし，φ は $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\\ \cos\varphi=\dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\end{cases}$ を満たす角

C_1 と C_2 は初期条件と呼ばれるものにより変化するが，角速度である $\sqrt{\frac{k}{m}}$ は物体の質量である m 及び比例定数 k で定まる値である。

よって，単振動の周期に関しては $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ で定まることも分かる。このようにして，単振動に関しても，運動方程式 (42) からどのような運動をするかを求めることできるのである。

(8)　特性方程式が重解をもつ場合

以上で，高校の物理の力学に関する部分を微分方程式を用いて概観したが，数学的な興味としては，特性方程式が重解をもつ場合の線形 2 階斉次微分方程式がどのような解をもつかが残っている。この点について考察をしておきたい。ここでも，まず，数列の隣接 3 項間漸化式の場合を考えてみよう。

例題 6

漸化式 $\begin{cases}a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0\\ a_1=0,\quad a_2=1\end{cases}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

この漸化式は

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2\,(a_{n+1}-2a_n) \tag{45}$$

としか変形することができない。ここから

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1} \tag{46}$$

を得る。右辺の 2^{n-1} に着目すると，式 (46) の両辺を 2^{n+1} で割るという解法が見えてくる。

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}&=\frac{1}{4}\\ \therefore\quad\frac{a_n}{2^n}&=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{4}(n-1)\\ \therefore\quad a_n&=(n-1)\,2^{n-2}\end{aligned}$$

例題 7

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{47}$$

例題 6 に準じて解くことを考える。

$$y'' - 2y' = 2(y' - y) \tag{48}$$

であるから

$$y' - 2y = C_1\, e^{2x} \tag{49}$$

を得る。式 (46) の右辺の形を見て 2^{n+1} で式 (46) の両辺を割ったように，式 (49) の両辺を e^{2x} で割ることを試みる。すると

$$e^{-2x}y' - 2ye^{-2x}\, y = C_1 \tag{50}$$

を得るが，この式の左辺は $e^{-2x} \cdot y$ の導関数になっていることに気付く。したがって，次のように解くことができる。

$$\begin{aligned} \left(e^{-2x} \cdot y\right)' &= C_1 \\ e^{-2x} \cdot y &= C_1\, x + C_2 \\ \therefore \quad y &= \left(C_1\, x + C_2\right)\, e^{2x} \end{aligned} \tag{51}$$

6　まとめ

微分方程式は，数学の中で決して易しい分野ではなく，どの高校生にも対応できるものではない。しかしながら，大学で理学や工学を学び，将来的に研究者や技術者を目指す高校生にとっては，早い時期に慣れ親しむ必要があるものである。物理や機械・電気といった工学の分野を学ぶためには必要不可欠であるので，高等学校の発展的な学習に取り入れることは，意義あることと考える。

上述したような高校生が，微分方程式の解法を習得し，それにより物理や工学分野を興味をもって学ぶことを期待する。

参考文献

・新編 数学 II（大谷雅則 他／数研出版）
・新編 数学 III（大谷雅則 他／数研出版）
・物理（國友正和 他／数研出版）
・線形代数入門（斎藤正彦／東京大学出版会）